В.М. Миклюков

Почти-решения уравнений в частных производных

(Сборник статей)

Предисловие

Ниже приводится цикл статей, посвященных почти решениям нелинейных уравнений с частными производными. В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями уравнений, но с функциями, "близкими" к истинным решениям. В процессе приближенного вычисления мы также находим лишь функцию, "близкую" к истинному решению.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}$ – измеримая по Лебегу функция такая, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess}\inf_{D'} k(x) \leq \operatorname{ess}\sup_{D'} k(x) < \infty \,.$$

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x, \xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения

$$\mu_1\, k(x)\, |\xi|^p \leq \langle \xi, A(x, \xi) \rangle \,, \qquad |A(x, \xi)| \leq \mu_2\, k(x)\, |\xi|^{p-1} \,,$$

где μ_1, $\mu_2 > 0$ и $p \geq 1$ – некоторые постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0 \,. \tag{$*$}$$

Данное уравнение содержит как частный случай уравнение для p-гармонических функций, где предполагается $p > 1$. Допущение $p = 1$ позволяет включить в рассмотрения уравнение минимальной поверхности, уравнение максимальной поверхности в пространстве Минковского, а также уравнение газовой динамики.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является *почти-решением* уравнения (*), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^{1,q}(D) \,, \quad 0 \leq |\varphi(x)| \leq 1 \,,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset D$ выполнено:

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle \, dx \right| < \varepsilon \,.$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти-решения h.

Нетрудно видеть, что всякая C^2-функция $h : D \to \mathbb{R}^1$ такая, что $|\mathrm{div} A(x, \nabla h)| \le \varepsilon_1$, является почти-решением (*) с уклонением $\varepsilon_1 \mathcal{H}^n(D)$.

Понятие почти-решения было введено в нашей работе "A-решения с особенностями как почти-решения, Матем. сб., т. 197, вып. 11, 2006, стр. 31-50"в связи с изучением решений с особенностями уравнения (*). Показано, что при определенных условиях решение (*), даже имеющее неустранимые особенности, может являться почти-решением. Даны оценки его уклонения.

В работе "Почти квазиконформные отображения как почти решения, в сб. Математический и прикладной анализ, вып. 3, изд-во Тюменск. гос. ун-та., 2007, 59-70" устанавливаются связи почти-квазиконформных отображений в смысле Каллендера с почти-решениями уравнений вида (*).

В работе "Принцип максимума для разности почти-решений нелинейных эллиптических уравнений, Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, n. 1, 2007, 33-45"нами доказывается специальная форма принципа максимума для разности почти-решений.

Теорема A. *Пусть h_1, h_2 – почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ уравнения (*), удовлетворяющие на границе области предположению*

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\, x_0 \in \partial D}} (h_1(x) - h_2(x)) \le 0 \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Тогда либо $h_1(x) \le h_2(x)$ всюду в D, либо открытое множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и

$$\int\limits_{\{|x|<r\} \cap \mathcal{O}} k(x)\, |\nabla(h_2 - h_1)|^2\, d\mathcal{H}^n \le \frac{2M}{\mu_1}\, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad M = \sup_D |h_2(x) - h_1(x)|.$$

В работах "Зоны стагнации решений и почти-решений эллиптических уравнений, Восьмая Казанск. летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, т. 35, Казань: Казанское математическое общество, 2007, 174-181", "О зонах стагнации в сверхмедленных процессах, Докл. Акад. Наук, т. 418, n. 3, 2008, 304-307"и "Оценки размеров зоны стагнации почти решений уравнений параболического типа, Сибирский журнал индустриальной математики, т. XI, n. 3(35), 2008, 96-101" указываются размеры зон стагнации почти-решений уравнений эллиптического и параболического типов.

В работе "К неравенству Гарнака для почти решений эллиптических уравнений, Изв. РАН, Серия математическая, Т. 73, n. 5, 2009" приводится некоторая специальная версия неравенства Гарнака для почти-решений. Именно, доказана следующая

Теорема В. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и U, V – ее подобласти, $V \subset U \subset D$. Пусть h – положительное почти-решение в D уравнения (*) с $k \equiv 1$, $p > n-1$ и*

$$A(x, \lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p-2}\,A(x,\xi) \quad \forall x \in D \text{ и } \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^1\,. \qquad (**)$$

Тогда

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in V \backslash \mathcal{O}_C\} \le \exp\{\,\theta_p(V,U,D)\}\,\sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x) : x \in V \backslash \mathcal{O}_C\}\,,$$

где точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всевозможным непустым открытым подмножествам $\mathcal{O}_C \subset D$, $D \setminus \mathcal{O}_C \neq \emptyset$, таким, что $h|_{\partial \mathcal{O}_C} = C$, $C = \mathrm{const}$, и $\theta_p(V,U,D)$ – некоторая постоянная (вид которой указывается).

В работе "Решения параболических уравнений как почти решения эллиптических, в сб. Математический и прикладной анализ. Тюмень: изд-во Тюменск. гос. ун-т., n. 4, 2010, 96-113" устанавливается связь решений уравнений параболического типа с почти-решениями подходящих уравнений эллиптического типа. Именно, доказана

Теорема С. *Пусть $h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$ – обобщенное решение уравнения*

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = B(t, h, h'_t)\,,$$

где $A(x,\xi)$ удовлетворяет условию (**),

$$B(t,h,h'_t) = b_0(t)\,|h|^{p-2}\,h + b_1(t)\,|h|^{p-2}\,h\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

и

$$b_0(t) > 0,\; b_1(t) : (\tau_0, \tau_1) \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

– локально липшицевы на (τ_0, τ_1) функции.

Тогда $h(x,t)$ является почти-решением некоторого уравнения вида (*), а уклонение $s(\tau_0,\tau_1)$ почти-решения определяется выражением

$$s(\tau_0,\tau_1)=\int\limits_D d\mathcal{H}^n \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left| b_0\,|h|^{p-2}h + b_1\,|h|^{p-2}h\,h'_t - \frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\right|\,dt\,.$$

Близкие утверждения имеют место и для решений уравнений гиперболического типа.

Некоторые приложения к вопросам устранения особенностей решений уравнения газовой динамики и отображений с ограниченным искажением см. в главе 7 нашей книги "Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения, Волгоград: изд-во ВолГУ. 2007".

В работе "Теорема о трех сферах для почти гармонических функций, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, т. 7, N 2, 2010, 270-278," доказывается аналог теоремы Адамара о трех окружностях для почти гармонических функций, определенных в областях типа шарового слоя.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h)=0\,,\quad p>1. \qquad (***)$$

Доказательство базируется на принципе максимума для разности почти p-гармонических функций. Обобщенные решения h уравнения (***) называются также *p-гармоническими* функциями, а само уравнение (***) – p-гармоническим (см. Heinonen J., Kilpeläinen T., and Martio O., *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Clarendon Press, Oxford etc., 1993).

Почти решения с уклонением $\varepsilon=0$ являются обобщенными решениями. Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ – область и пусть $k(x):D\to\mathbb{R}^1$ – измеримая по Лебегу, неотрицательная и почти всюду конечная функция.

Пусть A, B – непустые, замкнутые относительно D, непересекающиеся подмножества. Обозначим через

$$\operatorname{cap}_k(A,B)=\inf_u\int\limits_D k(x)\,|\nabla u|^2\,d\mathcal{H}^n,\quad u\in C^1(D)\,,\quad u|_A\equiv 0,\quad u|_B\equiv 1\,,$$

взвешенную k-емкость конденсатора $(A, B; D)$ и через

$$\lambda_k(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\displaystyle\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,|\nabla u|^2 d\mathcal{H}^n}{\displaystyle\int\limits_{\mathcal{O}} k(x)\,u^2 d\mathcal{H}^n}\,, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

– взвешенную основную частоту открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является *k-узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{cap}_k (D_r, D \setminus D_R) = 0\,,$$

где $D_t = \{|x| < t\} \cap D$.

Ниже приводится обобщение теоремы о трех окружностях на случай p-гармонических функций $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, заданных в j-шарах в $\mathbb{R}^n$, определяемых следующим образом. Зафиксируем целое j, $1 \le j \le n$ и вещественное число $t \ge 0$. Множества

$$B_j(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_j(x) < t\} \text{ и } \Sigma_j(t) = \partial B_j(t), \text{ где } d_j(x) = \Big(\sum_{i=1}^{j} x_i^2\Big)^{1/2},$$

мы будем называть соответственно j-шаром и j-сферой в $\mathbb{R}^n$. При $j = n$ шар $B_j(t)$ совпадает со стандартным евклидовым шаром $B^n(0,t)$ и сфера $\Sigma_j(t)$ есть евклидова сфера $S^{n-1}(0,t)$. В частности, символ $\Sigma_j(0)$ определяет j-сферу радиуса 0, т.е.

$$\Sigma_j(0) = \{x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_j = 0\}\,.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$ – фиксированные числа и пусть

$$D^j_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < d_j(x) < \beta\}.$$

При $j = 1$ множество $D^j_{\alpha,\beta}$ есть слой, расположенный между двумя параллельными гиперплоскостями. При $1 < j < n$ граница области $D^j_{\alpha,\beta}$ состоит из двух цилиндрических поверхностей.

Пусть $v \in C^0(D^j_{r,R})$, и пусть

$$M(r) = \limsup_{x\to\Sigma_j(r)} v(x)\,.$$

Рассмотрим функцию

$$v_{r,R}(x)=\frac{v(x)-M(r)}{M(R)-M(r)},\quad r<R.$$

Теорема D. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<r<R\le\infty$. *Пусть* $v(x)\in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D^j_{r,R})$ *– почти решение уравнения* (***) *в области* $D^j_{r,R}$, $1\le j\le n$, *с уклонением* $\varepsilon>0$ *и пусть* $M(t)=\sup_{B_i(t)}v(x)$. *Тогда при всех* $t\in(r,R)$ *таких, что*

$$\Sigma_j(t)\cap\mathcal{O}=\emptyset\,,\quad \mathcal{O}=\left\{x\in D^j_{r,R}:v_{r,R}(x)-u(x)>0\right\},$$

выполнено

$$M(t)\le\big(M(R)-M(r)\big)u_0^{j,p}(t)+M(r),$$

При этом, если открытое множество $\mathcal{O}$ *не пусто, то*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}}k(x)\left|\nabla(v_{r,R}(x)-u(x))\right|^2d\mathcal{H}^n\le\frac{A}{\mu_1}\,\varepsilon+$$

$$+2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2A^2\,\mathrm{cap}_k\left(\mathcal{O}_r,\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_R\right),$$

где

$$A=\sup_{D^j_{r,R}}|v_{r,R}(x)-u(x)|$$

и

$$k(x)=\int\limits_0^1\left|\lambda\nabla v(x)+(1-\lambda)(M(R)-M(r))\,\nabla u(x)\right|^{p-2}d\lambda\,.$$

В случае $j=p=n$ имеем

$$\xi(r,t)=\ln\frac{t}{r}\quad\text{и}\quad u_0^{n,n}(t)=\frac{\ln(t/r)}{\ln(R/r)}$$

и, тем самым, из теоремы D вытекает

Следствие 1. *Пусть* $0 < r < R \leq \infty$ *и пусть* $v(x) \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D^n_{r,R})$ – *неотрицательное почти решение уравнения* (***) *с* $p = n$ *и уклонением* $\varepsilon > 0$ *в шаровом слое*

$$D^n_{r,R} = \{r < |x| < R\} .$$

Тогда при всех $t \in (r, R)$ *таких, что*

$$\Sigma_n(t) \cap \mathcal{O} = \emptyset \,, \quad \mathcal{O} = \{x \in D^n_{r,R} : v_{r,R}(x) - u(x) > 0\} \,,$$

выполнено

$$M(t)^{\ln(R/r)} \leq M(r)^{\ln(R/t)} \, M(R)^{\ln(t/r)} \,,$$

При этом, если открытое множество $\mathcal{O}$ *не пусто, то имеет место указанная в теореме* D *оценка его размеров.*

В работе "Теорема о двух сферах для почти решений уравнений типа минимальной поверхности, в сб. Записки семинара 'Сверхмедленные процессы', вып. 5. Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 51-61", рассматриваются почти решения сильно нелинейных уравнений эллиптического типа, включая уравнение минимальных поверхностей. Приводится специальная версия теоремы Адамара о трех окружностях. При этом в отличие от случая p-гармонических функций для оценки максимума функции на внутренней окружности достаточно знания максимума только на внешней, что является проявлением эффекта сильной нелинейности уравнения (см., например, главу VI монографии J.C.C. Nitsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975).

В работе "Специальная аппроксимация решений нелинейных уравнений с частными производными"рассматривается вопрос о наследовании альтернативы Фрагмена – Линделефа при аппроксимации решений A-гармонических уравнений почти-решениями.

Некотрые результаты, касающиеся почти решений системы Бельтрами см. в главе 14 нашей монографии "Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения". Волгоград: изд-во ВолГУ. 2010. 305 стр. и, также, в главе 12 обзора "Анализ в анизотропных пространствах", www.uchimsya.co.

Владимир Михайлович Миклюков,
Независимая Научная Лаборатория UCHIMSYA, LLC,
Yonkers, NY, USA
miklyuk@mail.ru, miklyuk@hotmail.com, 30.08.2012

Содержание