

В.М. Миклюков

**Конформное отображение
нерегулярной поверхности
и его применения**

2-е издание, исправленное и дополненное

Волгоград 2011

Миклюков В.М.

Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения
[Текст]: [монография], 332 с./ ISBN 5-9669-0071-X

Монография посвящена изложению результатов исследования конформного отображения двумерных нерегулярных поверхностей в евклидовом пространстве, и в частности, локально липшицевых поверхностей.

Обсуждаются проблемы существования и единственности отображения, граничного поведения отображения; строится теория простых концов поверхности, аналогичная теории Каратеодори; доказываются теоремы типа теорем Альфорса и Варшавского о конформном отображении "угловых" и "полосообразных" областей на канонические области. Даются применения разрабатываемой теории в задаче о допустимой скорости стабилизации решений уравнения газовой динамики и качественных вопросах решений уравнений типа минимальной поверхности.

Для математиков и физиков разных специальностей, студентов и аспирантов.

ББК 22.161.558

© UCHIMSYA, LLC 2011

Предисловие

Это просто удивительно, что при наличии наикрасивейшей и богатейшей теории конформных отображений плоских областей соответствующая теория конформных отображений поверхностей вплоть до настоящего времени так и не представлена связным изложением.

Целью данной работы является введение в теорию конформных отображений нерегулярных поверхностей. Автор ограничился рассмотрением, главным образом, локально липшицевых поверхностей. По-видимому, такой класс поверхностей минимально необходим в обобщениях и в определенной степени достаточен для приложений.

Ниже затрагиваются следующие проблемы: существование и единственность отображения, граничное поведение отображения и простые концы поверхности, теоремы типа теорем Альфорса и Варшавского, применения в задаче о допустимой скорости стабилизации решений уравнения газовой динамики и качественных вопросах решений уравнений типа минимальной поверхности. Более детально с содержанием книги читатель может ознакомиться по оглавлению.

Отметим, что рассматриваемый класс задач не требует применения комплексного переменного. Так что, можно было бы вполне обоснованно дать другое название книги — "Конформное отображение без комплексного переменного". Тем не менее, в тех местах, где применение функций комплексного переменного в достаточной степени оправдано соображениями удобства, язык комплексного переменного используется. Автор пытался сделать изложение максимально простым с тем, чтобы оно было доступно в том числе и молодым математикам, только приступающим к профессиональной работе в данной области.

В основе книги лежит курс лекций, прочитанный нами магистрантам в 2004/05 учебном году. Поэтому, как правило, при необходимости выбора между изложением результата в максимальной общности и демонстрацией метода его получения предпочтение отдавалось второму и отсылке за общностью к оригинальным работам.

Во второе издание добавлены результаты, касающиеся вопросов существования и единственности решений вырождающихся систем Бельтрами, что позволяет рассматривать изотермические координаты на поверхностях с особенностями.

В конце каждой из глав формулируются задачи, продвижения в решении которых весьма способствовали бы, на наш взгляд, дальнейшему расширению возможностей применения разрабатываемой техники.

Построение теории в полном объеме требует привлечения к исследованиям достаточно большого числа математиков. Мы приглашаем к содружеству в разработках (и, в частности, к соавторству в написании книги) всех, кому это кажется небезинтересным.

Автор надеется, что книга окажется полезной читателю, заинтересованному в том числе и приложениями метода конформных отображений.

Имеется перевод на английский язык первого издания книги [96].
Большую помощь при переводе автору была оказана Александрой Миклюковой;
ей же выполнен перевод на английский язык ряда рекламных материалов.
Открыто сотрудничество для перевода на другие языки.

Владимир Михайлович Миклюков,
Независимая Научная Лаборатория "UCHIMSYA, LLC"
New York, USA
miklyuk@mail.ru, miklyuk@hotmail.com

Содержание

1	Инструментарий	6
1.1	Абстрактная поверхность	6
1.2	Псевдометрика	9
1.3	Расстояние r_Ω как метрика Финслера	10
1.4	Граница абстрактной поверхности	12
1.5	Модуль семейства кривых на поверхности	13
1.6	Вычисление модуля	16
1.7	Оценка модуля в финслеровой метрике	21
1.8	Конденсатор на поверхности	24
1.9	Принцип длины и площади	28
1.10	Задачи	31
2	Локально минимальные поверхности	32
2.1	Поверхности в \mathbf{R}^m	32
2.2	Уравнение Лапласа – Бельтрами	34
2.3	Функция высоты	35
2.4	Задачи	41
3	Гомеоморфизмы с обобщенными производными	42
3.1	Терминология и обозначения	42
3.1.1	Расширенная плоскость	42
3.1.2	N -функции	43
3.1.3	Пространства Орлича	44
3.2	Классы \widetilde{BL}_k^Φ	46
3.2.1	Определения классов	46
3.2.2	Замкнутость классов	48
3.3	Другая форма принципа длины и площади	50
3.3.1	Основное неравенство	50
3.3.2	Мажоранта для функции $\kappa_0(\varepsilon)$	53
3.4	Оценки искажения внутри области. Нормальность	56
3.5	Оценки искажения в замкнутой области	59
3.5.1	Относительное расстояние Г.Д. Суворова	59
3.5.2	Равностепенная непрерывность в замкнутой области	62

4	Система Бельтрами	64
4.1	Обобщенные решения	64
4.2	Специальный класс N -функций	68
4.3	$W^{1,2}$ -Мажорируемые функции	72
4.4	Множества нулевой выпуклой емкости	77
4.4.1	Определение емкости и простейшие свойства	77
4.4.2	Емкость кругового кольца	81
4.4.3	Оценки емкости кругового кольца	83
4.4.4	Множества h -меры нуль и емкости нуль	85
4.5	Особые множества конформных отображений	88
4.6	Теорема существования и единственности	89
4.7	Обобщения	94
4.7.1	Ключевая лемма	94
4.7.2	Объединительная теорема	97
4.7.3	Учет модуля непрерывности	99
4.7.4	Области общего вида	101
4.8	Комментарии	102
5	Изотермические координаты	104
5.1	Основная теорема	104
5.2	Канонический гомеоморфизм	107
5.3	Непараметрические поверхности	110
5.4	Доказательство теоремы 3.2.1	112
5.5	Доказательство теоремы 3.1.1	116
5.6	Билипшицевы поверхности	122
5.7	Поверхности с выделенными особенностями	123
5.8	Задачи	125
6	Граница поверхности	126
6.1	Относительное расстояние М.А. Лаврентьева	126
6.2	Простые концы	129
6.3	Конформное отображение T	131
6.4	Q^* -гомеоморфизмы поверхностей	135
6.5	Искажение при Q^* -гомеоморфизмах	141
6.6	Локальные оценки	149
6.7	Искажение относительного расстояния	150
6.8	Задачи	152
7	Скорость аппроксимации канонического гомеоморфизма	153
7.1	Характеристики близости	153
7.2	Классы BL_k и BL	161
7.3	Отклонение на компактах	162
7.4	Отображение круга на круг	169
7.5	Устойчивость по мере	177

7.6	Доказательство теоремы 5.1.1	181
7.7	Замечания о $W^{1,2}$ -мажорируемых функциях	181
7.7.1	Множество P_∞	181
7.7.2	Непустота класса	182
7.8	Задачи	184
8	Искажение площади	185
8.1	Графики над кругами	185
8.2	K -Квазиконформные отображения	187
8.3	Основная теорема	190
8.4	Доказательство основной теоремы	191
8.5	Задачи	198
9	Теоремы Альфорса – Варшавского	199
9.1	Плоские полосы	199
9.2	Примыкающие подобласти	201
9.3	Оценки конформного отображения	212
9.4	Оценки величин $k_\Omega(G')$, $k_\Omega(G'')$	217
9.5	Задачи	221
10	Скорость стабилизации решений	223
10.1	Уравнение газовой динамики	223
10.2	Комплексный потенциал	225
10.3	Отображение на полосу	227
10.4	Проблема единственности	229
10.5	Теоремы Фрагмена – Линделефа	236
10.6	Две леммы	238
10.7	Круговой сектор	241
10.8	Доказательство теоремы 8.1.2	245
10.9	Полуполоса	247
10.10	Доказательство теоремы 8.1.1	251
10.11	Задачи	252
11	Критические точки решения	253
11.1	Проблема Ниче	253
11.2	Обобщенные решения	255
11.3	Отображение на полуплоскость	257
11.3.1	Оценки модуля семейства дуг	259
11.3.2	Доказательство теоремы 11.3.1	263
11.4	Оценки скорости роста решений	263
11.4.1	Неравенство для интеграла энергии	264
11.4.2	Сопряженная функция	271
11.4.3	Рост сопряженной функции (I)	274
11.4.4	Рост сопряженной функции (II)	275

11.5 Узкие области	277
11.6 Критические точки решения	282
11.7 Задачи	286
12 Решения вблизи границы	287
12.1 Основные результаты	287
12.2 Вспомогательное конформное отображение	292
12.2.1 Определение и свойства	292
12.2.2 Конформный тип поверхности	294
12.2.3 Свойства относительного расстояния	296
12.3 Скачки решения на границе	298
12.3.1 Оценка площади графика	298
12.3.2 Монотонность решения	300
12.3.3 Доказательство теоремы 12.2.1	301
12.3.4 Точки квазинепрерывности	302
12.3.5 Поведение решения в точках скачка	305
12.3.6 Оценка суммарного скачка	307
12.4 Теорема типа теоремы Фату	308
12.5 Непрерывность и квазинепрерывность	310
12.6 Задачи	311
Указатель	316
Список литературы	318