

**В.М. Миклюков**

**Функции весовых классов Соболева,  
анизотропные метрики и вырождающиеся  
квазиконформные отображения**

(Издание второе, исправленное и дополненное)

2012 New York, ©UCHIMSYA, LLC

*Данная работа является объектом авторского права и находится под охраной Закона РФ "Об авторском праве и смежных правах". Использование данной работы или любой ее части без ссылок на авторов запрещается. Нарушители авторских прав авторов настоящей работы могут быть подвергнуты административному или уголовному преследованию в порядке ст. 7.12 КоАП РФ (Нарушение авторских и смежных прав) или ст. 146 УК РФ (Нарушение авторских и смежных прав).*

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Г. Григорьева  
канд. физ.-мат. наук, доц. А.Ю. Игумнов  
канд. физ.-мат. наук, доц. А.Н. Кондрашов

# Предисловие

Монография посвящена изучению функций и отображений с обобщенными в смысле С.Л.Соболева частными производными на  $n$ -мерных (в общем случае — анизотропных) поверхностях.

Рассматриваются вопросы, связанные с изучением поведения вблизи границы гомеоморфных отображений  $f : D \rightarrow \Delta$  класса  $\text{Sob}_\sigma^{l,p}$  областей на таких поверхностях. Для областей евклидова пространства теория соответствия границ при гомеоморфизмах класса  $\text{Sob}^{1,n}$  была построена Ж. Лелон-Ферран [LF55], Г.Д. Суворовым [Suv65], [Suv85], [Suv86], их учениками и последователями. Сегодня мы возвращаемся к этой тематике в связи с возникающими потребностями в вопросах триангуляции поверхностей и построения сеток. В изотропном случае см. [SIvan03], [Gar06], [Prok06], [GFZ07], [AGG07], [Azar07], [Mikl06, глава 7] и др.

Настоящая работа вызвана желанием записать некоторые из имеющихся результатов по-новому, применительно к новым задачам, связанным с указанными приложениями. Ключевой момент нашего подхода состоит в использовании модульной техники, развитой в теории конформных и квазиконформных отображений. Наряду с этим, следуя [Suv65], [Ovch72], [Suv85], мы широко используем различные версии ”относительного расстояния” и его оценки, базирующиеся на ”принципе длины и площади”.

Из вопросов общего характера в книге обсуждается проблема аппроксимации функции в окрестности точки и, в частности, проблема существования полного дифференциала функции в точке (в том числе — граничной) и почти всюду в области, указываются признаки вложения пространства  $\text{Sob}_\sigma^{l,p}$  в  $L^q$  и  $C^\alpha$ .

Указываются применения в вопросах существования и единственности вырождающихся квазиконформных отображений с заданным распределением характеристик. Главное отличие используемого здесь подхода от

новейших подходов, применяемых в [ГwMa08], [AIM09], состоит в выделении множества особенностей с тем, чтобы при малости его хаусдорфовой меры уметь доказывать единственность получаемого отображения.

Формулируется ряд нерешенных задач для начинающих исследователей.

Во второе издание добавлена глава, посвященная вырождающимся квазиконформным отображениям с двумя парами характеристик.

Мы будем рады, если книга окажется полезной читателю.

**Владимир Михайлович Миклюков**

Доктор физико–математических наук, профессор,  
Заслуженный деятель науки Российской Федерации  
Август 2012, [www.uchimsya.info](http://www.uchimsya.info)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Весовые соболевские классы <math>\text{Sob}_\sigma^{l,p}</math></b>	<b>10</b>
1.1	Функциональные классы на подмножествах $\mathbb{R}^n$	10
1.2	Поверхности в $\mathbb{R}^m$	12
1.3	Функции класса $\text{Sob}_\sigma^{1,p}$ на поверхности	15
<b>2</b>	<b>Весовой модуль</b>	<b>17</b>
2.1	Определение модуля	17
2.2	Свойства весового модуля	18
2.3	Признаки вложения в $L^q$ и $C^\alpha$	24
<b>3</b>	<b>Анизотропные метрики</b>	<b>28</b>
3.1	Понятие абстрактной поверхности	28
3.2	Двойственная функция	29
3.3	Псевдометрика	32
3.4	Пополнение по псевдометрике	34
3.5	Модуль и емкость конденсатора	36
3.6	Понятие об NED-множествах	38
3.7	Альтернативное определение модуля	39
<b>4</b>	<b>Следы <math>\text{Sob}_\sigma^{1,p}</math>-функций на поверхностях</b>	<b>40</b>
4.1	Спряжляемые множества	40
4.2	$\mu$ -Шар и $\mu$ -сфера	42
4.3	Модуль семейства дуг на $\mu$ -сфере	43
4.4	Условие ограниченности функции на $\mu$ -сфере	51
4.5	Условие принадлежности функции классу $L^q(U)$	53
4.6	Непрерывность функции по Гельдеру	54
4.7	Следы на границе	55
4.7.1	Постановка задачи	55

4.7.2	Продолжение функций в псевдометрических пространствах . . . . .	57
4.7.3	Редуцированная задача . . . . .	58
4.7.4	Доказательство теоремы 4.7.1 . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Аппроксимация функции вблизи особенности</b>	<b>63</b>
5.1	К понятию дифференциала функции в точке . . . . .	63
5.1.1	Дифференциал во внутренней точке . . . . .	63
5.1.2	Концы области . . . . .	64
5.1.3	Дифференциал в граничной точке . . . . .	65
5.2	Условия единственности дифференциала . . . . .	66
5.3	Аппроксимация в окрестности особой точки . . . . .	69
5.3.1	Задача об аппроксимации . . . . .	69
5.3.2	Основная теорема . . . . .	70
5.3.3	Условие дифференцируемости . . . . .	72
5.4	Оценки модуля $\text{mod}_{p,\sigma}\Gamma(y, a; B_D^\nu(a, r))$ . . . . .	73
5.5	Аппроксимация вблизи внутренней точки . . . . .	76
5.6	Графики со светоконусоподобными особенностями . . . . .	86
5.7	Аппроксимация вблизи граничной точки . . . . .	88
5.8	Области с нулевыми углами на границе . . . . .	91
5.9	Нерешенные задачи . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Условия дифференцируемости почти всюду</b>	<b>98</b>
6.1	К истории вопроса . . . . .	98
6.2	Слабо монотонные функции . . . . .	99
6.2.1	Принцип "длины и площади" в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	101
6.2.2	$(p, \lambda)$ -Условие . . . . .	107
6.3	Дифференцируемость почти всюду . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Принцип "длины и площади" на поверхности</b>	<b>113</b>
7.1	Двумерный случай . . . . .	113
7.2	Многомерная версия принципа . . . . .	118
7.3	Обобщение неравенства Овчинникова – Суворова . . . . .	123
<b>8</b>	<b>Относительное расстояние Лаврентьева</b>	<b>128</b>
8.1	Относительное расстояние на поверхности . . . . .	128
8.2	Граница анизотропной поверхности $\Omega$ . . . . .	132
8.3	Простые концы анизотропной поверхности . . . . .	134
8.4	Классификация простых концов анизотропной поверхности . . . . .	137

8.5	Искажение относительного расстояния . . . . .	138
8.6	Теорема типа теоремы Каратеодори . . . . .	143
<b>9</b>	<b>Относительные расстояния Суворова и Овчинникова</b>	<b>145</b>
9.1	Относительное расстояние I . . . . .	145
9.2	Граничные элементы и простые концы области . . . . .	148
9.2.1	Граничные элементы . . . . .	148
9.2.2	Простые концы . . . . .	149
9.2.3	Области с компактным пополнением . . . . .	150
9.3	Относительное расстояние II . . . . .	152
9.4	Характеристики квазиконформности . . . . .	156
9.5	Классы отображений . . . . .	158
9.6	Оценки относительного расстояния . . . . .	159
<b>10</b>	<b>Пучки компактов в многосвязных областях</b>	<b>165</b>
10.1	Диаметр пучка компактов . . . . .	165
10.1.1	Сетки . . . . .	165
10.1.2	Пучки компактов . . . . .	166
10.1.3	Сетки класса $\gamma_{F,O}(A_1 \dots A_K)$ . . . . .	167
10.1.4	Ориентации сеток . . . . .	167
10.1.5	$d_{F,O,p}$ -Диаметры пучка . . . . .	168
10.2	Относительное расстояние III . . . . .	169
10.2.1	Определение . . . . .	170
10.2.2	Величина $\rho_{\pm}$ как псевдометрика . . . . .	170
10.3	Нерешенные задачи . . . . .	171
<b>11</b>	<b>Классы <math>\widetilde{BL}^{\Phi}</math></b>	<b>172</b>
11.1	Сферическая метрика . . . . .	172
11.2	Классы Орлича . . . . .	173
11.2.1	$N$ -Функции . . . . .	173
11.2.2	$\Delta_2$ -условие . . . . .	175
11.3	Классы $\widetilde{BL}^{\Phi}$ как подклассы классов $\widetilde{Sob}^{1,\Phi}$ . . . . .	177
11.4	Замкнутость классов . . . . .	180
11.5	Ключевое неравенство . . . . .	183
11.5.1	Функция $\kappa_0(\varepsilon)$ . . . . .	186
11.5.2	Мажоранта для $\kappa_0(\varepsilon)$ . . . . .	188
11.6	Оценки искажения внутри области . . . . .	190
11.7	Нормальность . . . . .	192

11.8	Оценки искажения в замкнутой области . . . . .	193
11.9	К вопросу о точности оценок . . . . .	200
11.10	Устойчивость . . . . .	202
11.11	Сильная монотонность вблизи границы . . . . .	206
11.11.1	Монотонность и градиент . . . . .	209
<b>12</b>	<b>Вариационная <math>\Psi</math>-емкость</b>	<b>218</b>
12.1	Понятие $\Psi$ -емкости . . . . .	218
12.2	Емкость кругового кольца . . . . .	222
12.3	Свойства функции $\nu_0$ . . . . .	224
12.4	$h$ -Мера Хаусдорфа и $\Psi$ -емкость . . . . .	227
12.5	$\Psi$ -емкость и линейная мера Хаусдорфа . . . . .	228
12.6	Выделенные множества и цепи открытых подмножеств . . . . .	230
<b>13</b>	<b>Вырождающиеся квазиконформные отображения</b>	<b>234</b>
13.1	Комплексная форма записи системы Бельтрами . . . . .	235
13.2	Аппроксимация . . . . .	235
13.3	Связи с весовыми соболевскими классами . . . . .	239
13.4	Специальный класс $N$ -функций . . . . .	241
13.5	Теорема существования и единственности . . . . .	245
13.5.1	$W^{1,2}$ -Мажорируемые функции . . . . .	245
13.5.2	Устранимые особенности конформных отображений	246
13.5.3	Теоремы существования и единственности . . . . .	250
13.6	Изотермические координаты на поверхностях с особенностями . . . . .	260
13.6.1	Постановка задачи . . . . .	260
13.6.2	Основные результаты . . . . .	262
13.6.3	Доказательство теорем 13.6.1 и 13.6.2 . . . . .	264
<b>14</b>	<b>Вырождающиеся квазиконформные отображения с двумя парами характеристик</b>	<b>265</b>
14.1	Отображения с двумя парами характеристик . . . . .	265
14.2	Вторая комплексная характеристика . . . . .	268
14.3	Многосвязные области . . . . .	270
14.4	Неоднолистные решения . . . . .	271
14.5	Единственность . . . . .	273
14.6	Теорема несуществования . . . . .	274
14.7	$\sigma$ -Гармонические отображения . . . . .	280



14.7.1	Связи с весовыми соболевскими классами . . . . .	281
14.7.2	Существование отображения . . . . .	281
14.7.3	Свойства предельного отображения . . . . .	284
14.7.4	Биективность . . . . .	286
14.7.5	Нормировка . . . . .	289
14.7.6	Другие нормировки . . . . .	292
14.7.7	Неограниченные области . . . . .	293
14.8	Замечания о сильно эллиптических системах . . . . .	296
14.9	Задачи . . . . .	299
<b>15</b>	<b>Почти-решения системы Бельтрами</b>	<b>301</b>
15.1	Понятие почти-решения . . . . .	301
15.2	Оценка уклонения . . . . .	304
15.3	Условия сходимости почти-решений . . . . .	307
	<b>Авторский и предметный указатель . . . . .</b>	<b>317</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>324</b>