Математика
вместо ядерной энергетики

Анализ в анизотропных пространствах

В.М. Миклюков
(miklyuk@mail.ru, miklyuk@hotmail.com)

Предисловие. К проблеме навигации в анизотропных пространствах

Если A и B суть реально существующие объекты, то под *реальным расстоянием* $r(A,B)$ от A до B может пониматься время или число килокалорий, которые необходимо затратить чтобы дойти от A до B, количество бензина, которое необходимо затратить чтобы доехать на той или иной машине от A до B, стоимости этого бензина и т.п. Ясно, что в общем случае $r(A,B)$ не равно $r(B,A)$. Расстояния $r(A,B)$ с подобными свойствами называются *анизотропными*. В реальном мире мы, как правило, имеем дело не с идеальными, но с анизотропными расстояниями и знание этих расстояний в практике обыденной жизни могло бы существенно изменить нашу жизнь, сделав ее более экономически мотивированной.

В частности, это могло бы существенно повлиять на энергетические траты социума так, что наши предложения можно рассматривать как **проект глобальной экономии энергии**.

Вопросы экономии энергии становятся особенно важными в связи с непрекращающимися авариями на атомных станциях. Авария на атомной станции, случившаяся в территориально небольшой стране, может поставить точку в истории этой страны. Таким образом, прекращение функционирования атомных станций в территориально небольших странах является лишь вопросом времени. А что взамен? Думается, что прежде всего это – существенное изменение политики в области энергетических трат.

В целом же, наличие высокоскоростных супер-ЭВМ и возможность мгновенно получать результаты вычислений в любой географической точке влекут определяющую роль математики в формирующейся цивилизации.

Один из возможных подходов к реализации данного проекта состоит в использовании уже существующих систем GPS и ГЛОНАСС и в организации среди разработчиков этих систем подструктур, занимающихся указанными вопросами.

В качестве альтернативного подхода к проблеме можно предложить нижеследующую последовательность действий:

1) приобретение супер-ЭВМ;

2) создание на ее основе систематически обновляющейся базы данных о населённых пунктах региона и о дорогах, их связывающих (с учётом

анизотропности связей);

3) написание алгоритма поиска оптимального "расстояния" от пункта до пункта ;

4) организации интернет-системы запросов о реальных расстояниях и высокоскоростных ответов на них, как это сделано, например, в системе http://maps.google.com для изотропного случая.

К примеру, появляется возможность наряду со стабильным расписанием движения общественного транспорта иметь другое, стоимость проезда согласно которому переменна и зависит от количества желающих им воспользоваться на данный момент времени. Здесь имеется множество своих специальных подзадач, связанных с согласованием маршрутов и расписаний.

Нашей главной целью является создание математической теории, обеспечивающей работу указанного выше алгоритма. В частности, мы предполагаем построение за ближайшие 2-3 года основ математического анализа в анизотропных пространствах. Простейшие примеры таких пространств доставляют пространство Минковского и пространство Финслера.

В настоящее время мы ограничиваемся формированием математического аппарата, применяемого (в изотропном случае) в вопросах конструирования сеток на поверхностях и их триангуляции. Для более развернутого подхода необходимы систематические контакты с разработчиками конкретных навигационных методов. Вместе с тем приступать к реализации проекта можно прямо сейчас (начиная с простейших систем – метро, железная дорога и т.п.).

Имеются (и весьма далеко продвинуты !) исследования в области информационной геодезии и глобальных навигационных спутниковых систем, выполненные с использованием классического анализа. Это будет непременно востребовано при разработке общих подходов.

Вместе с тем заметим, что и самые обычные дифференциальные уравнения с частными производными могут описывать в областях эвклидова пространства неизотропные процессы в случае, если их коэффициенты зависят от производных. Таким образом, методы исследования неизотропных процессов далеко не исчерпываются специальными приемами, разрабатываемыми в этих целях, но требуют привлечения всего спектра существующих математических теорий. Это тем более важно, поскольку даже переформулирование основных физических постулатов на вновь создаваемом математическом языке могло бы существенно удлинить сроки применения методов анизотропного анализа на практике.

Ниже излагается примерная программа исследований, планируемых на ближайшие годы. В конце каждой из глав формулируются задачи, продвижения в решении которых весьма способствовали бы, на шаш взгляд, дальнейшему расширению возможностей применения разрабатываемой техники в приложениях.

Владимир Михайлович Миклюков
Лаборатория "Сверхмедленные процессы"
Волгоградского государственного университета
Университетский проспект 100
Волгоград 400062
РОССИЯ. Июнь 2011 г.

Содержание

1 Функции с обобщенными производными в псевдометрических пространствах 16

1.1 Псевдометрическое пространство . . . 16

1.1.1 Псевдометрики . . . 16

1.1.2 Квазиметрики . . . 17

1.1.3 Абстрактные поверхности . . . 17

1.1.4 Пространство-время Минковского . . . 21

1.1.5 Мера на псевдометрическом пространстве . . . 22

1.2 Производная и дифференциал . . . 23

1.2.1 Слоения . . . 23

1.2.2 Производные по слоениям . . . 24

1.2.3 Дифференциал . . . 25

1.2.4 Точки локального экстремума . . . 26

1.2.5 Функциональные классы . . . 27

1.3 Функции с обобщенными производными . . . 28

1.3.1 Модуль семейства кривых . . . 28

1.3.2 Функции класса $\mathrm{Sob}^{1,p}_{r,\mu}(D)$ . . . 29

1.3.3 Условие ограниченности функции . . . 30

1.3.4 Условие принадлежности функции классу $\mathrm{L}^q(D)$ . . . 31

1.3.5 Непрерывность функции по Гельдеру . . . 32

1.4 Локальная аппроксимация . . . 33

1.4.1 Концы области . . . 33

1.4.2 Постановка задачи . . . 34

1.4.3 Основная теорема . . . 34

1.4.4 Условия дифференцируемости в точке . . . 36

1.4.5 Условия светоконусоподобности в точке . . . 37

1.5 Проблемы продолжения функций в анизотропных метриках . . . 38

1.6 Нерешенные задачи . . . 46

2 Липшицевы отображения 47

2.1 Теорема Степанова . . . 47

2.2 Формула Кронрода – Федерера . . . 47

2.2.1 Матрица Якоби $(f'(a))$ . . . 47

2.2.2 Замена переменных . . . 49

2.3 Обобщенная формула Гаусса – Остроградского . . . 53

2.3.1 Формула Крофтона . . . 54

2.4 Формула Гаусса – Остроградского для липшицевых функций 54

2.5 Следы липшицевых функций 55
2.6 Спрямляемые множества 55
2.7 μ-Шар и μ-сфера 56
2.8 Модуль семейства дуг на μ-сфере 57
2.9 Нерешенные задачи 62

3 Псевдометрика в специальных координатах 64
3.1 Координатные системы 64
3.2 Псевдометрика в евклидовой области 65
3.3 Псевдометрика Финслера 66
3.4 Псевдометрика на поверхности 67
3.5 Нерешенные задачи 67

4 Принцип длины и площади 68
4.1 Двумерный случай 68
4.2 Многомерная версия 71
4.3 Обобщение неравенства Овчинникова – Суворова 74
4.4 Нерешенные задачи 76

5 Гомеоморфизмы классов Соболева псевдометрических пространств 77
5.1 Постановка задачи 77
5.2 Случай $2 \leq n < \infty$ 80
5.3 Случай $n = 2$ 84
5.4 Нерешенные задачи 88

6 Относительные расстояния 89
6.1 Относительное расстояние Лаврентьева 89
6.1.1 Относительное расстояние 89
6.1.2 Граница области в псевдометрическом пространстве . 92
6.1.3 Простые концы области в псевдометрическом пространстве 94
6.1.4 Классификация простых концов анизотропной поверхности 96
6.1.5 Искажение относительного расстояния 97
6.1.6 Теорема типа теоремы Каратеодори 101
6.2 Относительные расстояния Суворова и Овчинникова 101
6.2.1 Относительное расстояние I 101
6.2.2 Граничные элементы и простые концы области 104
6.2.3 Граничные элементы 104
6.2.4 Простые концы 105
6.2.5 Области с компактным пополнением 105
6.2.6 Относительное расстояние II 106
6.2.7 Характеристики квазиконформности 109
6.2.8 Классы отображений 110
6.2.9 Оценки относительного расстояния 112
6.3 Нерешенные задачи 115

7 Многосвязные области **116**
7.1 Диаметр пучка компактов . . . 116
7.1.1 Сетки как обобщенные кривые . . . 116
7.1.2 Пучки компактов . . . 117
7.1.3 Семейства сеток $\gamma_{F,\mathcal{O}}(A_1 \dots A_K)$ . . . 117
7.1.4 Ориентации сеток . . . 118
7.1.5 $d_{F,\mathcal{O},p}$-Диаметры пучка . . . 119
7.2 Относительное расстояние III . . . 119
7.2.1 Определение . . . 120
7.2.2 Величина $\rho_\pm$ как псевдометрика . . . 120
7.3 Нерешенные задачи . . . 120

8 Теория Каратеодори-Суворова сходимости к ядру **122**
8.1 Сходимость к ядру последовательности областей . . . 122
8.2 Равностепенная непрерывность и равностепенная открытость . . . 123
8.2.1 Определения . . . 123
8.2.2 Семейства двумерных плоских областей . . . 124
8.2.3 Общий случай . . . 125
8.3 Теорема Каратеодори – Суворова . . . 126
8.3.1 Евклидова метрика . . . 126
8.3.2 Общий случай . . . 129
8.4 Другая нормировка . . . 129
8.4.1 Евклидова метрика . . . 129
8.4.2 Общий случай . . . 131
8.5 Нерешенные задачи . . . 132

9 Квазиконформные и квазилипшицевы отображения анизотропных поверхностей **133**
9.1 Модуль как квазиинвариант . . . 133
9.2 Дифференциальные свойства . . . 133
9.3 Вырождающиеся квазиконформные отображения . . . 133
9.4 Неоднолистные квазиконформные отображения со сменой ориентации . . . 134

10 Уравнения с частными производными в анизотропных метриках **135**
10.1 Уравнение Лапласа-Бельтрами . . . 135
10.2 Квазилинейные уравнения общего вида . . . 135

11 Почти-решения **136**

12 Почти-решения системы Бельтрами **137**
12.1 Система Бельтрами . . . 137
12.2 Понятие почти-решения . . . 138
12.3 Оценка уклонения . . . 140
12.4 Условия сходимости почти-решений . . . 143
12.5 Нерешенные задачи . . . 149

13 Приложения к сверхмедленным процессам **150**

14 Сетки в анизотропных пространствах. Триангуляция **151**
14.1 Изотермические координаты на поверхностях с особенностями . . . 151
14.1.1 Основная теорема . . . 151
14.1.2 Канонический гомеоморфизм . . . 154
14.1.3 Непараметрические поверхности . . . 156
14.1.4 Доказательство теоремы 3.2.1 . . . 158
14.1.5 Доказательство теоремы 3.1.1 . . . 165
14.1.6 Билипшицевы поверхности . . . 170
14.1.7 Поверхности с выделенными особенностями . . . 171
14.1.8 Нерешенные задачи . . . 173
14.2 Вариационные принципы в проблеме построения сеток на анизотропных поверхностях . . . 174
14.2.1 Квазиоптимальные сетки . . . 174

15 Описание анизотропной среды методами классического анализа **175**

Список литературы

[MKK11] В.М. Миклюков, А.А. Клячин, В.А. Клячин, Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского, 2011, 532 стр., www.uchimsya.info.

[Mikl05] В.М. Миклюков, Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: изд-во ВолГУ. 2005. – 273 стр., www.uchimsya.info.; Vladimir M. Miklyukov, Confomal Maps of Nonsmooth Surfaces and their Applications, Exlibris corp., Philadelphia, 2008.

[Rund59] H. Rund, The Differential Geometry of Finsler Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1959; Х. Рунд, Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, М.: Наука, 1981, 504 стр.

[Roc70] R.T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton: Princeton Univ. Press, 1970; Р. Рокафеллер, Выпуклый анализ, Мир, М.: 1973.

[Asa04] Г.С. Асанов, Финслероидная геометрия, М.: физический факультет МГУ, 2004, 160 стр.

[GP67] С.К. Годунов, Г.П. Прокопов, О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., т. 7, n. 5, 1967, 1031 – 1059.

[BGIY75] П.П. Белинский, С.К. Годунов, Ю.Б. Иванов, И.К. Яненко, Применение одного класса квазиконформнх отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами, Ж. вычисл. матем. и матем. физ, т. 15, n. 6, 1975, 1499-1511.

[GRC90] С.К. Годунов, Е.И. Роменский, Г.А. Чумаков, Построение разностных сеток в сложных областях с помощью квазиконформных отображений, Вычислительные проблемы в задачах математической физики, Тр. АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т математики, т. 18, Новосибирск: Наука, 1990, 75-84.

[BII96] Н.А. Бобылев, С.А. Иваненко С.А., И.Г. Исмаилов, Несколько замечаний о гомеоморфных отображениях, Математические заметки, т. 60, вып. 4, 1996, 593-596.

[KNTF98] Л.В. Круглякова, А.В. Неледова, В.Ф. Тишков, А.Ю. Филатов, Неструктурированные адаптивные сетки для задач математической физики, Математическое моделирование, т. 10, n. 3, 1998, 93-116.

[DL01] Мишель М. Деза, Моник Лоран, Геометрия разрезов и метрик, М.: МЦНМО, 2001, 736 стр.; Michel Marie Deza, Monique Laurent, Geometry of Cuts and Metrics, Springer, Berilin - Heideiberg - ...

[SLLDK05] Ю.И. Шокин, В.Д. Лисейкин, А.С. Лебедев, Н.Т. Данаев, И.А. Китаева, Методы римановой геометрии в задачах построения разностных сеток, Новосибирск: Наука, 2005, 256 стр.

[Aza07] Б.Н. Азаренок, О построении подвижных адаптивных пространственных сеток, М.: ВЦ РАН, 2007, 51 стр.

[BIK03] Н.А. Бобылев, С.А. Иваненко, А.В. Казунин, О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток, ЖВММФ, т. 43, n. 6, 2003, 808-817.

[Skv02] А.В. Скворцов, Триангуляция Делоне и её применение, Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002, 128 стр.

[SM06] А.В. Скворцов, И.С. Мирза, Алгоритмы построения и анализа триангуляции, Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2006, 168 стр.

[Leb10] А.С. Лебедев, Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками, Вычислительные технологии, т. 15, n. 1, 2010, 85-97.

[Gar11] В.А. Гаранжа, Дискретные кривизны, квазиизометрические отображения и квазиоптимальные расчетные сетки, Автореф. докторск. дисс., Новосибирск, 2011, 35 стр.

[HWM06] B. Hofmann-Wellenhof, H. Moritz, Physical Geodesy, Springer-Verlag, Wien - New York, 2nd edit., 2006.

[HWLW08] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, E. Wasle, GPS, GLONASS, Galileo, and more, Springer-Verlag, Wien - New York, 2008.

[Saks49] С. Сакс, Теория интеграла, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1949.

[Mikl10a] В.М. Миклюков, Некоторые признаки существования полного дифференциала в точке, Матем. сб., т. 201, n. 8, 2010, 45-62.

[Mikl10b] В.М. Миклюков, Некоторые условия светоконусоподобности графиков в пространстве Минковского, в сб. памяти Н.В. Ефимова, МГУ, 2011 (в печати).

[Mikl10] В.М. Миклюков, Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 305 стр., www.uchimsya.info.

[Kurat66] К. Куратовский, Топология, т. I, М.: Мир, 1966, 595 стр.

[Nab92] G.L. Naber, The Geometry of Minkowski Spacetime. An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity, Applied mathematical Sciences, v. 92, Springer-Verlag, 1992.

[KF68] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1968, 496 стр.

[LS72] В.П. Луференко, Г.Д. Суворов, Семейства гомеоморфизмов, относительные метрики и теорема Каратеодори, Сиб. мат. журн., 13, n. 2, 1972, 368-383.

[Sob50] С.Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1950, 256 стр.

[BIN75] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М.: Наука, 1975, 480 стр.

[MP06] В.Г. Мазья, С.В. Поборчий, Теоремы вложения и продолжения в нелипшицевых областях, СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. 400 стр.

[Eck86] K. Ecker, Area maximizing hypersurfaces in Minkowski space having an isolated singularity, Manuscripta Math., v. 56, n. 4, 1986, 375-397.

[AV88] В.В. Асеев, А.К. Варисов, Об одной гипотезе для плоских топологических вложений, ограниченно искажающих модкули, Докл. АН УзССР, n. 7, 1988, 8-9.

[V94] А.К. Варисов, О плоских топологических вложениях, ограниченно искажающих модули, Докл. АН РУз, n. 2, 1994, 10-12.

[Karm03] А.П. Кармазин, Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей, Сургут: изд-во СурГУб 2003, 211 стр.

[Dub09] В.Н. Дубинин, Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного, Владивоосток: Дальнаука, 2009, 401 стр.

[AKM93] А.А. Клячин, В.М. Миклюков, Существование решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского, Матем. сб., т. 184, n. 9, 1993, 103-124.

[AKM05] А.А. Клячин, В.М. Миклюков, Изотропные гиперповерхности и минимальные продолжения липшицевых функций, Функц. анализ и прил., т. 39, вып. 3, 2005, 28-36.

[VKM91] В.А. Клячин, В.М. Миклюков, Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского, Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 55, n. 1, 1991, 206-217.

[Fed69] H. Federer, Geometric measure theory, Die Grundlehren der math. Wiss. Vol. 153, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969; Г. Федерер, Геометрическая теория меры, М.: Наука, 1987, 760 стр.

[BZ80] Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер, Геометрические неравенства, Ленинград: Наука, 1980, 288 стр.

[Zie89] W.P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions, Graduate Texts in Mathematics 120, Springer-Verlag, New York, 1989.

[Haj00] P. Hajlasz, Sobolev Mappings, Co-Area Formula and Related Topics, Труды по анализу и геометрии, Новосибирск: изд-во Института математики, 2000, стр. 227 - 254.

[Lav35] М.А. Лаврентьев, Sur une classe de représentations continues, Матем. сб., v. 42, n. 2, 1935, 407-424.

[Mal01] J. Malý, Lectures on change of variables in integral, Reports of the Depart. of Math., Preprint 306, Univ. of Helsinki, 2001, 1-18.

[EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC PRESS, Boca Raton – New York – London – Tokio, 1992.

[Mikl07] В.М. Миклюков, Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007, 532 стр. www.uchimsya.info.

[Bra92] F. Braudel, Le temps du monde, Civilisation matérielle, économie et capitalisme, XV-XVIII' siécle, tome 3, Armand Colin; Ф. Бродель, Время мира, Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV - XVII вв., т. 3, М.: Прогресс, 1992, 680 стр.

[Arch10] Е.В. Архипова, Трансграничное сотрудничество Волгоградской и Западно - Казахстанской областей, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 84-04.

[Mikl06] В.М. Миклюков, $\mathcal{A}$-Решения с особенностями как почти решения, Матем. сб., т. 197, Вып. 11, 2006, 31-50.

[Mikl09] В.М. Миклюков, К неравенству Гарнака для почти решений, Изв. РАН, Серия математическая, т. 73, n. 5, 2009, 171-180.

[Mikl10] В.М. Миклюков, Теорема о трех сферах для почти гармонических функций, Збiрник праць Iн-ту математики НАН Украïни, т. 7, N 2, 2010, 270-278.

[Mikl10a] В.М. Миклюков, Теорема Лиувилля для почти-решений $\mathcal{A}$-гармонических уравнений, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010, 162-174.

[Mikl11a] В.М. Миклюков, Решения параболических уравнений как почти решения эллиптических, в сб. Математический и прикладной анализ. Тюмень: изд-во Тюменск. гос. ун-та. вып. 4, 2010, 96-113.

[MikSu72] В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов, О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками, Исслед. по соврем. теории функций и ее применениям, " Наукова Думка", Киев, 1972, 45-53.

[Schw69] H.A. Schwarz, Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. - J reine angew. Math., v. 70, 1869, 121-136.

[Gresk28] W. Gresky, Konforme Abbildung der Oberfläche eines rektangulären Hexaeders auf die Kugeloberfläche. - Inaugural – Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig, Weida i. Thür. 1928, 1-74.

[Carat34] К. Каратеодори, Конформное отображение, Современная математика, Книга пятая, ОНТИ, Государственное технико-теоретическое издательство, Москва — Ленинград, 1934.

[EF01] J. Eells and B. Fuglede, Harmonic Maps between Riemannian Polyhedra, Cambridge Tracts in Mathematics **142**, Cambridge Univ. Press, UK, 2001.

[Re89] Ю.Г. Решетняк, Двумерные многообразия ограниченной кривизны, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 70, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Москва, 1989, 8-189.

[Küh70] R. Kühnau, Trianguliere Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit ganz-linear Bezugssubstitutionen und quasikonforme Abbildungen mit stückweise kpnstanter komplexer Dilatation. - Mathematische Nachrichten, Band 46, Heft 1-6, 1970, 243-261.

[Toro94] T. Toro, Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds, J. Differential Geometry, V. 39, 1994, 65-101.

[MS95] S. Müller, V. Sverák, On surfaces of finite total curvature, J. Differential Geometry, V. 42, 1995, 229-258.

[Gru86] И.М. Грудский, Построение внутренних координат на составных римановых поверхностях, в сб. " Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ", Элиста, 1986, 30-45.

[Gru89] И.М. Грудский, Формула Кристоффеля — Шварца для полиэдральных поверхностей, ДАН СССР, Т. 307, n. 1, 1989, 15-17.

[Men36] Д.Е. Меньшов, Les conditions de monogénéité, Act. sci. et ind., 1936, V. 329, 1—52; Имеется русск. перевод: Условия моногенности, В сб. " Д.Е. Меньшов. Избранные труды. Математика", Изд-во " Факториал", Москва, 1997, 73-115.

[Tro63] Ю.Ю. Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности, ГИФМЛ, Москва, 1963.

[Dol63] Е.П. Долженко, О " стирании" особенностей аналитических функций, Успехи мат. наук, т. 18, n. 4, 1963, 135-142.

[Hav63] С.Я. Хавинсон, О стирании особенностей, Литовский математический сборник, III, 1, 1963, 271-287.

[DM00] G. David and P. Mattila, Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane, Revista Matem. Iberoamericana, V. 16, n. 1, 2000, 137-215.

[Miklwww] В.М. Миклюков, Сверхмедленные процессы, SZONES.pdf, www.uchimsya.info.

[Mikl11a] В.М. Миклюков, Некоторые версии альтернативы Фрагмена – Линделефа для почти-решений, направл. в печать.

[Guk66] В.А. Жуков, Об одном доказательстве теоремы о существовании полного дифференциала класса W_p^1, Тр. Том. ун-та, Сер. мех.-мат., т. 189, 1966, 13-17.

[Bel74] П.П. Белинский, Общие свойства квазиконформных отображений, Изд-во " Наука" , Сибирское отделение, Новосибирск, 1974.

[Volk70] Л.И. Волковыский, Некоторые вопросы теории квазиконформных отображений, в сб. "Некоторые вопросы математики и механики", к 70-летию М.А. Лаврентьева, Новосибирск, 1970.

[Mikl04] В.М. Миклюков, Изотермические координаты на поверхностях с особенностями, Мат. сб., т. 195, n. 1, 2004, 69-88.

[Vek59] И.Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, ГИФМЛ, Москва, 1959.

[Mor38] C.B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., V. 43, 1938, 126-186.

[Bers61] Л. Берс, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1961.

[MM04] O. Martio, V. Miklyukov, On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation, Complex Variables, V. 49, 2004, 647-656.

[VoGol76] С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн, Функциональные характеристики квазиизометрических отображений, Сиб. матем. журн., т. 17, n. 4, 1976, 768-773.

[LF55] J. Lelong–Ferrand, Représentation conforme et transformations a intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier–Villars, Paris, 1955.

[Su65] Г.Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965, 266 стр.

[Suv86] Г.Д. Суворов, Простые концы и последовательности плоских отображений, Киев: изд-во "Наукова Думка", 1986, 190 стр.

[LeVir73] O. Lehto, K.I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, 258 pp.

[GL59] F.W. Gehring, O. Lehto, On the total differentiability of functions of a complex variable, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, **272**, 1959, 1-9.

[Stein93] E.M. Stein, Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Univ. Press, 1993.

[GoRe83] В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения, Изд-во " Наука" , Москва, 1983.

[Ma00] J. Maly, Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral, в сборнике " Труды по анализу и геометрии", редактор-составитель С.К. Водопьянов, Изд-во Института математики, Новосибирск, 370-386, 2000.

[Hei01] J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, Springer - Verlag, New York – Berlin Heidelberg – etc., 2001, 140 pp.

[HK93] J. Heinonen, P. Koskela, Sobolev Mappings with Integrable Dilatations, Arch. Rational Mach. Anal., V. **125**, 1993, 81-97.

[Rash67] П.К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М.: Наука, 1967, 664 стр.

[Mikl08] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2008, 424 стр. www.uchimsya.info.

[Ste23] V. Stepanoff, Über totale Differenzierbarkeit, Math. Annales, v. 90, 1923, 318-320.

[Ste25] V. Stepanoff, Sur les conditions de l'existance de la differentielle totale (Об условиях существования полного дифференциала), Matem. sb., v. 32, 1925, 511-527.

[Halm53] П. Халмош, Теория меры, М.: ИЛ, 1953.

[Ivan75] Л.Д. Иванов, Вариации множеств и функций, М.: Наука, 1975, 352 стр.

[Lavr36] М.А. Лаврентьев, О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях, ДАН СССР, Т. 4, 1936, С. 207—210.

[Ovch65] И.С. Овчинников, Метрические свойства отображений класса $BL^{3/2}$, Тр. Томск. ун-та, сер. мех.-мат., v. 182, 1965, 32-45.

[Ovch69] И.С. Овчинников, Об одном аналоге теоремы Линделефа для пространственных отображений, в сб. "Метрические вопросы теории функций и отображений", вып. I, Киев: изд-во "Наукова Думка", 1969, 184-201.

[Ovch72] И.С. Овчинников, Оценка снизу интеграла Дирихле при отображениях шара на область, Сиб. матем. ж., т. XIII, n. 1, 1972, 142 – 152.

[Mikl80] В.М. Миклюков, Емкостные методы в задачах нелинейного анализа, Докторская диссертация, 1980, 147 стр. www.uchimsya.info.

[LF55] J. Lelong-Ferrand, Représentation conforme et transformations a intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier—Villars, Paris, 1955.

[OS65] И.С. Овчинников, Г.Д. Суворов, Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения, Сиб. матем. ж., т. 6, n. 6, 1965, 1292 – 1314.

[Su85] Г.Д. Суворов, Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений, Изд-во "Наукова Думка", Киев, 1985.

[Väi71] J. Väisäiä, Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Mathematics, 229, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.

[IAl76] И.А. Александров, Конформные отображения односвязных и многосвязных областей, Томск: изд-во Томск. ун-та, 1976, 156 стр.

[A77] П.С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию, М.: Наука, 1977, 368 стр.

[GU09] V. Gol'dshtein, A. Ukhlov, Weighted Sobolev Spaces and Embedding Theorems, Transactions of the American Mathematical Society, v. 361, n. 7, 2009, 3829-3850.

[GU10] V. Gol'dshtein, A. Ukhlov, About homeomorphisms that induce composition operators on Sobolev spaces, Complex Variables and Elliptic Equations, v. 55, n. 8-10, 2010, 833-845.

[Fed47] H. Federer, The (ϕ, k) rectifiable subsets in n space, Trans. Amer. Math. Soc., v. 62, 1947, 114–192.

[Fed58] H. Federer, A note on the Gauss–Green theorem, Proc. Amer. Math. Soc., v. 9, 1958, 447–451.

[Maz85] V.G. Maz'ya, Sobolev Spaces. - Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1985.

[Koe18] P. Koebe, Abhandlungen zur theorie der konformen Abbildung, Acta Math., v. 41, 1918, 305-344.

[Mysh49] А.Д. Мышкис, К понятию границы, Матем. сб., т. 25 (87), n. 3, 1949, 387-414.

[Gal52] J.S. Gal, Conformally invariant metrics on Riemann surfaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 45, 1952.

[Mikl70] В.М. Миклюков, К теории квазиконформных отображений в пространстве, Кандидатская диссертация, 1970, www.uchimsya.info.

[KKuf09] Б.П. Куфарев, П.П. Куфарев, О двух метрических способах определения простого конца последовательности плоских областей, ДАН СССР, т. 187, n. 5, 986-988; в сб. "Труды П.П. Куфарева. К 100-летию со дня рождения", 2009, Томск: Изд-во НТЛ, 182-185.

[Sch58] E.C. Schlesinger, Conformal invariants and prime ends, Amer. J. Math., v. 80, 1958, 83-102.

[Monah77] В.Н. Монахов, Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосибирск: Наука, 1977, 424 стр.

[Mikl68] В.М. Миклюков, О некоторых классах отображений на плоскости, ДАН СССР, т. 183, n. 4, 1968, 772-774.

[Mikl08M] V.M. Miklyukov, Concerning a Carathéodory - Suvorov Theorem on Kernel Convergence of Domain Sequences, Numerical Geometry, Grid Generation and High Performance Computing, Proc. Inter. Conference NUMGRID2008, A.A. Dorodnicyn Computing Center RAS, Moscow, 10-13 June, 2008, edited by V.A. Garanzha, Yu.G. Evtushenko, B.K. Soni and N.P. Weatherill, 20-26.

[Maz36] S. Mazurkiewicz, Über die Definition der Primenden, Fund. Math., v. 26, 1936, 272-279.

[Mar50] А.И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[CL66] Э. Коллингвуд, А. Ловатер, Теория предельных множеств, М.: Мир, 1971.

[Ahl73] L. Ahlfors, Conformal invariants, McGraw—Hill, New York, 1973.

[Car13] C. Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math, Ann., t. 73, 1913, 323-370.

[CP59] E.F. Collingwood, G. Piranian, The structure and distribution of prime ends, Arch. Math., v. 10, n. 5, 1959, 379-386.

[CP61] E.F. Collingwood, G. Piranian, Asymmetric prime ends, Math. Ann., v. 144, n. 1, 1961, 59-63.

[Pir60] G. Piranian, The distribution of prime ends, Mich. Math. J., V. 7, 1960, P. 83-95.

[Vol54] Л.И. Волковыский, Квазиконформные отображения, изд-во Львовского ун-та, 1954, 156 стр.

[Kre41] М.А. Крейнес, Sur une classe de fonctions de plusieurs variables, Матем. сб., v. 9 (51), 1941, 713-720.

[Lav62] М.А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М.: Изд-во АН СССР, 1962, 136 стр.

[Vodop08] С.К. Водопьянов, О регулярности отображений, обратных к соболевским, Докл. АН, т. 423, n. 5, 2008, 592-596.

[Gresh08] А.В. Грешнов, О дифференцируемости горизонтальных кривых в квазипространствах Карно – Каратеодори, Сиб. матем. ж., т. 49, n. 1, 2008, 67-86.

[Gresh11] А.В. Грешнов, Об обобщенном неравенстве треугольника для квазиметрик, индуцированных некоммутирующими векторными полями, Математические труды, т. 14, n. 1, 2011, 1-29.

[Mikl08a] В.М. Миклюков, Расстояние Лаврентьева на анизотропных поверхностях, Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 3, 2008, 76-101.

[Mikl08b] В.М. Миклюков, Расстояние Овчинникова на абстрактных поверхностях, Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 3, 2008, 117-145.

[Mikl09b] В.М. Миклюков, О некоторых модификациях принципа длины и площади на абстрактных поверхностях, Узбекский математический журнал, n. 1, 2009, 68-79.

[Mikl11b] В.М. Миклюков, Об изотермических координатах на локально липшицевых поверхностях с особенностями, Докл. АН, т. 437, n. 3, 2011, 305-308.