В.М. Миклюков

Сверхмедленные процессы

(Сборник статей)

Предисловие

Ниже приводится цикл статей[1] для использования в специальных курсах, читаемых студентам, специализирующимся в математике и ее приложениях. В качестве примера мы приводим рабочую программу спецкурса "Дифференциальные формы в микро- и наноканалах", читавшегося нами ранее.

Под "сверхмедленными" мы понимаем процессы, текущие величины в которых меняются столь незначительно, что зафиксировать эти изменения трудно или даже совсем невозможно, ввиду их малости по сравнению с погрешностью измерений. Изменения величин становятся заметными лишь по прошествию достаточно длительного времени.

Многочисленные примеры "сверхмедленных процессов" доставляют процессы старения — от старения биологических систем и строительных конструкций до старения спутников, процессы изменения экологических условий, траты ресурсов и т.п. — проблемы, являющиеся фундаментальными для новейшей цивилизации, вызревающей в процессе затухания в экономической жизни "англо-саксонской" доминанты. Вместе с тем сверхмедленными являются и значительный ряд других природных процессов ввиду их сверхмедлительности, выпадающих за пределы традиционных естественно-научных исследований. "Человек читающий" сам укажет подобные лакуны, имеющие место быть в астрономии, физике, механике, экономике, лингвистике, экологии и др.

Мы не будем здесь останавливаться на причинах, порождающих возникновение таких лакун. Отметим лишь, что их наличие, как и многое другое (экологические проблемы, финансовые кризисы), свидетельствует об ограниченности "англо-саксонского" подхода к жизни, базирующегося на формуле — "всё и сразу".

Альтернативный подход, который следовало бы обозначить как "китайский", предполагает планирование своих действий на десятилетия.

Россия занимает в этом вопросе промежуточное место, имея значительные слои населения как с одной, так и с другой ментальностью.

Известно, к примеру, что при течениях жидкости в тонких и длинных трубках возникают "зоны стагнации" — области, в которых потоки почти неподвижны. Если отношение длины трубки к ее диаметру велико, то потенциальная функция и функция тока почти неизменны на весьма протяженных участках. Ситуация кажется мало интересной, однако, если мы вспомним, что эти незначительные изменения происходят на сверхдлинных интервалах, то мы увидим здесь целую серию первоклассных задач, требующих разработки специальных математических методов.

Получаемые результаты оказываются небесполезными, в частности, для приложений в экономической географии. В случае, когда функция характеризует интенсивность товарообмена на том либо ином географическом пространстве, теоремы о ее зонах стагнации дают (при надлежащих ограничениях на выбираемую модель) оценки геометрических размеров зоны стагнации мира – экономики. Относительно понятия зоны стагнации в экономической географии см. монографию Ф. Броделя [2],

---

[1]Статьи приводятся в порядке времени их подготовки.

[2]F. Braudel, Le temps du monde, Civilisation matérielle, économie et capitalisme, XV-XVIII' siécle, tome 3, Armand Colin; Ф. Бродель, Время мира, Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV - XVII вв., т. 3, М.: Прогресс, 1992,

а также наш комментарий к статье Е.В. Архиповой [3].

Некоторые оценки размеров зон стагнации решений можно найти в главе 9 нашей монографии[4].

Выяснение параметров влияния на размеры зон стагнации, открывает возможность практических рекомендаций к целенаправленным изменениям конфигурации и, в частности, уменьшению либо увеличению таких зон. Так что в процессе принятия решения об изменениях пропускных условий на том или ином участке государственной границы необходимо каждый раз решать дифференциальные уравнения с частными производными и принимать окончательное решение с учетом этих математических расчетов.

Многие проблемы Северного Кавказа вызваны его территориальной раздробленностью, большим числом формальных (и неформальных) границ и, как следствие, трудностями при товарообмене и, вообще, в экономической жизни. При этом проблемы не решаемы одномоментно и "сразу". Необходима длительная, на протяжении поколений, разъяснительная работа среди старейшин кланов и в молодежной среде. Только тогда придет понимание, что подобные проблемы лучше решать сообща, чем по отдельности.

Владимир Михайлович Миклюков,
Независимая Научная Лаборатория UCHIMSYA, LLC, Yonkers, NY, USA
miklyuk@mail.ru, miklyuk@hotmail.com, 28.08.2012

680 стр.

[3]Е.В. Архипова, Трансграничное сотрудничество Волгоградской и Западно - Казахстанской областей, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 84-04.

[4]В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2008, 424 стр. www.uchimsya.info.

Оглавление

1 Зоны стагнации решений уравнения Лапласа-Бельтрами в длинных полосах 8

1.1 Введение . . . 8
1.2 Основные результаты . . . 9
1.3 Уравнение Лапласа-Бельтрами . . . 11
1.4 Оценки колебания . . . 13
1.5 Энергетические оценки . . . 17

2 s-Зоны гармонических функций на узких и длинных лентах 27

2.1 Основная теорема . . . 27
2.2 Уравнение Лапласа–Бельтрами . . . 31
2.3 Подготовительные результаты . . . 35
2.4 Доказательство теоремы . . . 45
2.5 Случай евклидовой метрики . . . 46

3 Stagnation Zones on Ideal Flows in Long and Narrow Bands 53

3.1 Introduction . . . 53
3.2 Boundary value problems . . . 54
3.3 Main results . . . 55
3.4 Almost Liouville line elements . . . 56
3.5 Oscillation estimates . . . 58
3.6 Energy estimates . . . 63
3.7 Proof of Main Theorems . . . 69
3.8 Examples . . . 71
3.8.1 The case of Theorem 3.3.7 . . . 72
3.8.2 The case of Theorem 3.3.10 . . . 73

4 Зоны стагнации решений параболических уравнений и их размеры 75

4.1 Зоны стагнации функции . . . 75
4.2 Уравнение теплопроводности . . . 76
4.3 Основное утверждение . . . 77

5 Многомерные слабые решения вблизи непрозрачной границы 78
5.1 Спрямляемые множества . . . 78
5.2 Поверхности . . . 80
5.3 Емкость и модуль . . . 81
5.4 Обобщенные решения . . . 83
5.5 Монотонность вблизи границы . . . 85
5.6 Предлиувиллевы теоремы . . . 86
5.7 Граничные множества емкости нуль . . . 91

6 Размеры зон стагнации решений с особенностями 94
6.1 Постановка задачи . . . 94
6.2 Приведенная граница . . . 95
6.3 Формула Остроградского–Гаусса . . . 96
6.4 Особенности векторного поля . . . 96

7 Зоны стагнации почти-решений 98
7.1 Почти-решения . . . 98
7.2 Иллюстрирующий пример . . . 100
7.3 Принцип максимума для почти-решений . . . 102
7.4 Основной результат . . . 103

8 Местное время, сверхмедленные процессы и зоны стагнации 105
8.1 Кстати, о времени . . . 105
8.2 Геологическое время . . . 106
8.3 Пространство-время живого организма . . . 107
8.4 Ход времени . . . 108

9 Некоторые задачи, возникающие в проблеме триангуляции пограничного слоя 112
9.1 Кубатурные формулы . . . 112
9.2 Правильная граница . . . 113
9.3 Квазиконформные поверхности . . . 114
9.4 Сохранение ориентации . . . 116
9.5 Квазиизометрические отображения . . . 117
9.6 Отображения, близкие к квазиизометриям . . . 118
9.7 Условие регулярности . . . 120

10 ″Толстая″ граница 121
10.1 Длина границы области . . . 121
10.2 Контроль за пограничной полосой . . . 122
10.3 Граничная задача для почти-решений . . . 123

11 A-Решения с особенностями как почти-решения 126
11.1 Почти-решения . . . 126
11.2 Примеры применения . . . 128
11.3 Дифференциальные формы . . . 132
11.4 Лемма о разбиении единицы . . . 134
11.5 Особенности дифференциальных форм . . . 137
11.6 Особенности A-решений . . . 142
11.7 Решения уравнения газовой динамики . . . 143
11.8 Приложения к квазирегулярным отображениям . . . 144

12 Принцип максимума для разности почти-решений p-гармонических уравнений 151
12.1 Класс уравнений . . . 151
12.2 Почти-решения . . . 152
12.3 Ключевое свойство . . . 153
12.4 Функция $I(\xi, \eta)$ . . . 156
12.5 Принцип максимума . . . 160
12.6 Цилиндрические области . . . 161

13 Stagnation Zones of A-Solutions 166
13.1 Introduction. . . . 166
13.2 Surfaces. . . . 167
13.3 Structure conditions. . . . 169
13.4 Capacity. . . . 170
13.5 A-solutions. . . . 170
13.6 Monotonicity close to boundary. . . . 171
13.7 Stagnation zones. . . . 172
13.8 A-solutions on stagnation zone. . . . 177
13.9 Corollaries. . . . 178

14 К неравенству Гарнака для почти-решений эллиптических уравнений 182
14.1 Уравнения . . . 182
14.2 Почти-решения . . . 183
14.3 Подготовительное неравенство . . . 184
14.4 Емкость . . . 186
14.5 Принцип 'длины и площади' . . . 187
14.6 Основная теорема . . . 188
14.7 Монотонные функции . . . 190
14.8 Почти-решения в шаре . . . 191

15 О зонах стагнации в сверхмедленных процессах 195
15.1 Понятие зоны стагнации . . . 195
15.2 Почти-решения на поверхности . . . 196
15.3 Признаки s-зоны . . . 198
15.4 Оценки почти-решения . . . 199
15.5 Условие нетривиальности почти-решения в s-зоне . . . 201

16 Потоки в микро- и наноканалах: скольжение или прилипание? 203
16.1 Постановка задачи 203
16.2 Пограничный слой 204
16.3 Краевая задача в прямоугольнике 205
16.4 Поведение на вертикальных сечениях 208

17 Оценки размеров зоны стагнации почти-решений уравнений параболического типа 210
17.1 Введение 210
17.2 Уравнения 211
17.3 Почти-решения 212
17.4 Основная теорема 213
17.5 Оценки $\eta_{p,E}(D)$ 216

18 Stagnation zones for A-harmonic functions on canonical domains 218
18.1 Introduction 218
18.1.1 Canonical domains 219
18.1.2 Frequencies 220
18.2 Saint-Venant principle 220
18.2.1 Structure conditions 221
18.2.2 A-solutions 221
18.2.3 Proof of the Saint-Venant principle 222
18.3 Stagnation zones 226
18.3.1 W_p^1-zones 226
18.3.2 L^p-zones 228
18.3.3 Zones at uniform metrics 228
18.4 Other applications 229
18.4.1 Estimates of W_p^1-norms 229
18.4.2 Phragmén-Lindelöf type theorems I 234
18.4.3 Phragmén-Lindelöf type theorems II 237

19 Приложение 241

1

Приложение

Рабочая программа спецкурса

"Дифференциальные формы в микро- и наноканалах"

Рабочая программа составлена на основании учебного плана
по специальности "Математика".

Программу подготовил
д.ф.-м.н. проф. В.М. Миклюков

Основные цели и задачи курса

Целью курса является введение в современные проблемы геометрического анализа применительно к исследованию зон стагнации векторных полей и дифференциальных форм в наноканалах.

При течениях различных субстанций в узких и протяженных трубках возникают зоны стагнации — участки, на которых потоки почти неподвижны. Если отношение протяженности трубки к величине, характеризующей ее узость, велико, то потенциальная функция и функция тока почти неизменны на весьма протяженных участках.

Подобная ситуация возникает при изучении течений в трещинах с малыми поперечными размерами, внутри наноканалов, сверхдлинных каналов или продуктопроводов, при исследовании потоков электрических или химических полей в микро-электро-механических системах (MEMS) и т.п.

Данная проблема имеет много различных аспектов, связанных с размерами канала, гладкостными свойствами его границы, качественными характеристиками потока и т.п. См., например, B.W. Webb, C.-F. Ma, Single-Phase Liquid Jet Impingement Heat Transfer, Advances in Heat Transfer, v. 26, 1995, 105-217; C.D. Meinhart, S.T. Wereley, J.G. Santiago, PIV measurements of a microchannel flow, Experiments in Fluids, v. 27, 1999, 414-419; A. Webb and D. Maynes, Velocity profile measurements in microtubes, 30th American Institute of Aeronautics and Astronautics Fluid Dynamics Conference, 28 June - 1 July, 1999/Norfolk, VA; Alurn N.R. and White J. A coupled numerical technique for self-consistent analysis of micro-electro-mechanical systems//*ASME Microelectromechanical Systems (MEMS)* 1996. V. 59. P. 275-280; Khrustalev D. and Faghri A. Coupled Liquid and Vapour Flow in Miniature Passages with Micro Groovs//*J. of Heat Transfer* 1999, v. 121, 729-733; Nie Y.Y. Navier-Stokes analysis of gaseous slip flow in long grooves // *Numerical Head Transfer* / Part A, 1999. V. 36. P. 75-93; Peterson G.P., Ma H.B. Temperature response of Heat Transport in a Micro Heat Pipe// J. of Heat Transfer 1999. V. 121. P. 438-445; И.В. Запороцкова, Н.Г. Лебедев, Л.А. Чернозатонский, Электронное строение углеродных нанотрубок, модифицированных атомами щелочных металлов, Физика твердого тела, 2004, т. 46, вып. 6, 1137-1142; И.В. Запороцкова, Н.Г. Лебедев, П.А. Запороцков, Протонная проводимость однослойных нанотрубок: полуэмпирические исследования, Физика твердого тела, 2006, т. 48, вып. 4, 756-760; И.В. Запороцкова, Н.Г. Лебедев, Механизмы заполнения углеродных однослойных нанотрубок атомарным водородом, Химическая физика, 2006, т. 25, n. 5, 100-105.

Мы изучаем зоны стагнации векторных полей и дифференциальных форм на поверхности. Такие области мы называем s-зонами.

Именно, следующее понятие является ключевым.

Определение. *Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ – область и $u : D \to \mathbf{R}$ – некоторая функция. Пусть $s > 0$ – некоторое число. Подобласть $\Delta \subset D$ называется s-зоной (зоной стагнации) функции u, если существует постоянная C такая, что эта функция отличается (в каком-либо смысле) от C в Δ не более, чем на s.*

К примеру,

$$\sup_{x\in\Delta} |u(x) - C| \le s$$

или ,

$$\|u(x) - C\|_{L^p(\Delta)} = \left(\int_{\Delta} |u(x) - C|^p \right)^{1/p} \le s\,.$$

Для всякой непрерывной функции $u : D \to \mathbf{R}$ и всякого $s > 0$ каждая точка области D имеет окрестность, являющуюся $s-$зоной. Нас будут интересовать только $s-$зоны достаточно больших размеров. Такие $s-$зоны могут служить препятствиями в вычислениях с ошибкой порядка s (к примеру, если этот порядок сравним с компьюторным нулем).

Так, при вычислении с точностью до 10^{-5} гармонической функции в прямоугольнике D с нулевыми граничными данными на его длинных сторонах, s-зоны начинают возникать уже при характерном размере

$$\frac{\text{длина } D}{\text{ширина } D} \ge 50.$$

Априорная информация относительно зон стагнации способствует более оптимальной организации вычислительного процесса за счет замены u соответствующими постоянными в $s-$зонах. Иногда это делает возможным существенно сократить объем вычислений.

Близкие явления возникают в процессе приближенных вычислений конформных отображений прямоугольников (D. Gaier, Ermittlung des konformen Modulus von Vierecken mit Differenzenmethoden, Numer. Math., 1972, v. 19, 179-194; L.N. Trefethen, Numerical computation of the Schwarz - Christoffel transformation, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1980, v. 1, 82-102).

Ряд связанных с ними вопросов можно найти также в разделах 2.6 и 3.4 монографии T.A. Driscoll, L.N. Trefethen, Schwarz-Christoffel Mapping, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 2002.

Ряд утверждений о размерах и местоположении $s-$зон обобщенного, локально липшицевого решения u уравнения Лапласа – Бельтрами на поверхности (в общем случае – негладкой !) при различных граничных условиях на решение, а также других специальных ограничениях на u см. в В.М. Миклюков, Зоны стагнации решений уравнения Лапласа-Бельтрами в длинных полосах, Математические Труды, т. 5, n. 1, 2002, 84-101; В.М. Миклюков, s-Зоны гармонических функций на узких и длинных лентах, в сб. "Математический и прикладной анализ", Издательство Тюменского государственного университета, Тюмень, 2003, 89-118; V.M. Miklyukov, S.-S. Chow, V.P. Solovjov, Stagnation zones of ideal flows in long and narrow bands, IJMMS 2004:62, 2004, 3339-3356.

Приложения

В случае, когда решение u характеризует интенсивность товарообмена на том либо ином географическом пространстве, граничное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right|_{\gamma} = 0 \quad (*)$$

описывает линию γ, "пересекать которую как с той, так и с другой ее стороны бывало выгодно с экономической точки зрения лишь в исключительных случаях"(см. стр. 18-19, Ф. Бродель, Время мира. Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV - XVII вв., т. 3, М.: Прогресс, 1992.

Теоремы об s-зонах дают (при надлежащих ограничениях на выбираемую модель) оценки геометрических размеров зоны стагнации мира-экономики, примыкающей к этому участку границы.

Условие (*) может быть истолковано также и как абсолютная непрозрачность участка γ границы области относительно потока градиента ∇f. Понятие прозрачности границы мы заимствуем из коллективной монографии А.Ю. Быкова, Л.Б. Вардомского, С.В. Голунова, А.М. Кирюхина, В.А. Колосова, А.И. Кубышкина и др., Прозрачные границы. Безопасность и трансграничное сотрудничество в зоне новых пограничных территорий России, Волгоградский государственный университет, 2002.

Обсуждение данной проблемы см. в сборнике: Записки семинара 'Сверхмедленные процессы', под ред. В.М. Миклюкова, вып. 1-3, Изд-во Волгоградского ун-та, 2006, 2007, 2008.

Для приложения в вопросах прогноза сейсмичности на важность исследований решений в протяженных областях сложного строения, многосвязных и с негладкой границей обращают внимание В.А. Бабешко и О.М. Бабешко, Об одном новом подходе в проблеме прогноза сейсмичности, Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, n. 4, 2005, 69-74.

Детальное описание содержания курса приведено ниже.

I. Элементы негладкого анализа

Изучаются необходимые для дальнейшего сведения о липшицевых функциях. В частности, мы формулируем теорему о неявных функциях, формулу Кронрода – Федерера интегрирования по множествам уровня, обобщенную интегральную формулу Гаусса – Грина и др.

Мы предполагаем *обзорное изложение* следующих вопросов (при этом, в зависимости от усвояемости материала, отдельные разделы будут предложены для самостоятельного изучения):

1.1. Теоремы о покрытии

1.2. Мера и размерность по Хаусдорфу

1.3. Липшицевы функции

1.4. Производная Кларке

1.5. Теорема об обратной функции

1.6. Формула Кронрода – Федерера

1.7. Спрямляемость и периметр

1.8. Обобщенная формула Гаусса – Грина

Основная литература

[1] Г. Федерер, Геометрическая теория меры, Изд-во "Наука", Москва, 1987.

[2] В.М. Миклюков, Введение в негладкий анализ, 2-е изд., Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.

II. Принцип Сен-Венана

Рассматриваемые вопросы:

2.1. Локально липшицевы поверхности

2.2. Обобщенные решения уравнения Лапласа – Бельтрами

2.3. Классы дифференциальных форм

2.4. Неравенство Пуанкаре – Соболева

2.5. Энергетические оценки в наноканалах

III. Зоны стагнации

Рассматриваемые вопросы:

3.1. Оценки постоянной в неравенстве Виртингера

3.2. Зоны стагнации решений эллиптических уравнений

3.3. Зоны стагнации решений уравнений параболического типа

3.4. Влияние особенностей

3.5. Зоны стагнации в трещинах

3.6. Предлиувиллевы теоремы и зоны стагнации

IV. Триангуляция канала
Рассматриваемые вопросы:

4.1. Графики Построение триангуляции канала на графике липшицевой функции.

4.2. Параметризованные поверхности. Каналы на параметризованных поверхностях, их триангуляции. Оценки качества триангуляции.

4.3. Неявно заданные поверхности. Каналы на неявно заданных поверхностях, их триангуляции и оценки качества триангуляции.

Основная литература

[1] B. Delaunay, Sur la sphére vide, Изв. АН СССР, ОМЕН, n. 4, 1934, 793-800; имеется перевод А.Ю. Игумнова: Записки семинара 'Сверхмедленные процессы', вып. 1, Изд-во Волгоградского ун-та, 2006, 147-153.

[2] Б.Н. Делоне и Н.Н. Сандакова, Теория стереоэдров, Труды МИАН, т. LXIV, М.: изд-во АН СССР, 1961, 28-51.

[3] С.Л. Соболев, Введение в теорию кубатурных формул, М.: Наука,1974.

[4] К.И. Бабенко, Основы численного анализа, Москва - Ижевск: *R&C* Dynamica, 2002.

[5] А.В. Скворцов, Геоинформатика, Изд-во Том. ун-та, 2005, 268 с.

[6] А.В. Скворцов, П.И. Поспелов, С.П. Крысин, Геоинформатика в дорожной отрасли (на примере IndorGIS), М.: Изд-во МАДИ, 2005. - 348 с.

[7] А.В. Скворцов, П.И. Поспелов, А.А. Котов, Геоинформатика в дорожной отрасли (на примере IndorGIS). - М.: Изд-во МАДИ, 2005. - 232 с.

[8] В.М. Миклюков, Сверхмедленные процессы, сборник статей, Волгоград, 2009.

[9] В.М. Миклюков, Введение в геометрический анализ, Изд-во Волгоградского ун-та, 2006.

[10] В.М. Миклюков, Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения, Изд-во Волгоградского ун-та, 2005; имеется английский перевод: Vladimir M. Miklyukov, Conformal Maps of Nonsmooth Surfaces and Their Applications, Exlibris Corporation, Philadelphia, 2008.

Дополнительная литература

[1] O. Martio, M. Vuorinen, V.M. Miklyukov, Critical points of $A-$solutions of quasilinear elliptic equations, Houston Journal of Mathematics, v. 25, n. 3, 1999, p. 583-601.

[2] O. Martio, M. Vuorinen, V.M. Miklyukov, Estimates for the energy integral of quasiregular mappings on Riemannian manifolds and isoperimetry, Czechoslovak Mathematical Journal, 51(126), 2001, Praha, p. 585-608.

[3] E.D. Callender, Hölder-continuity of N-dimensional quasiconformal mappings, Pacific J. Math., v. 10, 1960, p. 49-515.

[4] V. Miklyukov and V. Tkachev, Denjoy - Ahlfors Theorem for Harmonic Functions on Riemannian Manifolds and External Structure of Minimal Surfaces, Commun. in Analisys and Geometry, v. 4, n. 4, 1996, 547-587; перевод в сб. "Научные школы Волгоградского государственного ун-та. Геометрический анализ и его приложения", Волгоград, Изд-во ВолГУ, 1999.

[5] А. Романюк, А. Сторчак, Алгоритмы триангуляции, "Комиздат", 2004, http: www.cpp.com.ua.

[6] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, Изд-во "Мир", Москва, 1969.

[7] Ф.Г. Авхадиев, Конформные отображения и краевые задачи, Казанский фонд "Математика", 1996.

[8] V.A. Alexandrov, Remarks on Efimov's theorem about differential tests of homeomorphism, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., v. 36, n. 3-4, 1991, p. 101-105.

[9] S.M. Bates, Toward a precise smoothness nypothesis in Sard's theorem, Proc. Amer. Math. Soc. v. 117, n. 1, 1993, p. 279-283.

[10] D. Franke, O. Martio, V.M. Miklyukov, M. Vuorinen and R. Wisk, Quasiregular mappings and $\mathcal{WT}$ -classes of differential forms on Riemannian manifolds, Pacific J. Math., v. 202, n. 1, 2002, 73-92.

[11] F.H. Clarke, Generalized gradients and applications, Trans. of the Amer. Math. Soc., v. 205, 1975, p. 247-262.

[12] F.H. Clarke, On the inverse function theorem, Pac. J. Math., v. 64, n. 1, 1976, p. 97-102.

[13] М.А. Мережкин, Триангуляция подвижной деформируемой поверхности, Дипл. раб., Научный рук. – И.Ю. Потапьева, Каф. вычисл. методов и программ., ВолГУ, 2005.